Wstęp do teorii kategorii

Mateusz Szymański

20 listopada 2018

Wstęp

Poniższy skrypt zawiera, a przynajmniej próbuje, podstawowe (i przy okazji elementarne) wprowadzenie do teorii kategorii jako języka opisującego struktury matematycznego oraz wzajemne relacje pomiędzy nimi. Celem tych notatek jest oswojenie Czytelnika z podstawowym pojęciami oraz metodami (algebraicznymi) tej poddziedziny matematyki. O samych kategoriach możemy myśleć jako *strukturach*, które składają się z pewnych obiektów i przekształceń między nimi, które zachowują cechy rozważanych obiektów. Teorię tę można traktować z jednej strony jako pewien matematyczny *framework* (środowisko matematyczne) dla badanych struktur, z drugiej jednak – formę abstrakcji podstawowych, ogólnych własności pojęć, które współdzielone są, *mutatis mutandis*, z innymi, pozornie niezwiązanymi ze sobą, strukturami matematycznymi.

Zakładać będziemy, że Czytelnik zaznajomiony jest z podstawowymi strukturami matematycznymi: grupami, przestrzeniami liniowymi czy przestrzeniami topologicznymi – dowiemy się niebawem, że wraz ze swoimi homomorfizmami tworzą one kategorie.

Historycznie rzecz ujmując, za początek teorii kategorii uznaje się rok 1945 – datę opublikowania pracy Samuela Eilenberga oraz Saundersa MacLane'a *Natural isomorphisms in group theory*, a rozważania z tego zakresu wyrosły z topologii algebraicznej, która zajmuje się badaniem własności przestrzeni topologicznych przy użyciu metod algebraicznych. Należy mieć na uwadze, że od tego czasu pewne pojęcia z tego zakresu uległy przeobrażeniu – z dzisiejszego punktu widzenia nawet późniejsza praca *Categories for the Working Mathematician* (również autorstwa MacLane'a) przez niektórych może być uznawana za przestarzałą. Poniższy skrypt w głównej mierze bazuje na znacznie świeższej książce – *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats* Adámka, Herrlicha i Streckera.

W tym skrypcie znajduje się wiele faktów do sprawdzenia jako ćwiczenie. Autor jest przekonany, że utrwalanie elementarnych definicji, własności i faktów teorii kategorii wymaga praktyki i samodzielnego wysiłku. Nie zmienia to faktu, iż szablonowe rozumowania, na których można się wzorować, są przedstawione w pełni bez niedomówień.

Kurs ten obejmuje (w zamierzeniu):

1. kategorie: podstawowe definicje i przykłady,
2. rodzaje morfizmów,
3. konstrukcje uniwersalne: produkty, sumy rozłączne,
4. funktory,
5. diagramy, granice diagramów,
6. kategorie i pojęcia dualne, zasadę dualności,
7. podkategorie, ich własności,
8. refleksje oraz korefleksje,
9. zastosowania teorii kategorii w ogólnych konstrukcjach.

Spis treści

Rozdział 1

Kategorie, morfizmy, produkty

1.1 Pojęcie kategorii

Nie tracąc czasu na zbędne spekulacje, możemy przejść do formalnej definicji kategorii, a brzmi ona następująco:

Definicja 1.1.1 (Kategoria)
Kategorią $\mathbf{C}$ nazywamy strukturę złożoną z:

1. klasy $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, której elementy nazywamy *obiektami*,

2. klasy $\mathrm{Hom}(\mathbf{C})$, której elementami są *morfizmy* $f\colon A \to B$, gdzie A jest obiektem zwanym *dziedziną*, natomiast B – obiektem zwanym *przeciwdziedziną*,

3. operacji dwuargumentowej $\circ$ zwanym *składaniem* $g \circ f$ morfizmów $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ spełniającym dwa warunki:

   (a) jeżeli $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ oraz $h\colon C \to D$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (*łączność*),

   (b) dla każdego obiektu A istnieje morfizm id_A zwany *identycznością*, dla którego $f \circ \mathrm{id}_A = f$ oraz $g \circ \mathrm{id}_B = g$ dla każdych morfizmów $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to A$.

Innymi słowy kategoria składa się z pewnych obiektów oraz morfizmów między obiektami, dla których zachodzi łączne prawo składania morfizmów. Zauważmy, że ta dosyć abstrakcyjna definicja nie określa, czym powinny być obiekty! Co więcej, mimo nazewnictwa, morfizmy wcale nie muszą być funkcjami (chociaż, przyznajmy, na ogół będą).

Ćwiczenie 1.1.1 Sprawdź, że w dowolnej kategorii identyczność jest wyznaczona w sposób jednoznaczny.

Przekonamy się za moment, że bogactwo różnorodnych kategorii jest wprost niewyobrażalne. Przed tym jednak przekonamy się, że znane nam struktury matematyczne tworzą kategorie.

Przykład 1.1.1 Możemy wyróżnić podstawowe kategorie takie jak:

- **Set** – kategorię zbiorów wraz z funkcjami jako morfizmami,
- **Grp** – kategorię grup wraz z homomorfizmami grup,
- **Vec** – kategorię przestrzeni liniowych wraz z przekształceniami liniowymi,
- **Rng** – kategorię pierścieni (z jedynką) wraz z homomorfizmami pierścieni,
- **Top** – kategorię przestrzeni topologicznych wraz z funkcjami ciągłymi.

Oczywiście, powyższa lista nie jest kompletna. Czytelnik łatwo sprawdzi, że morfizmy każdej z wymienionych kategorii są domknięte na operację składania (np. złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą). O morfizmach możemy w powyższych przypadkach myśleć jako przekształceniach zachowujących strukturę.

Na ogół przy zadeklarowanej klasie obiektów wybór morfizmów jest jasny. Zdarza się jednak, że dla tej samej klasy obiektów możemy wybrać inne morfizmy, tworząc tym samym inne kategorie: w klasie przestrzeni metrycznych za morfizmy możemy wybrać:

1. funkcje ciągłe,
2. funkcje jednostajnie ciągłe,
3. odwzorowania nierozszerzające: tj. funkcje $f\colon X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi (X, d_X) oraz (Y, d_Y), dla których $d_Y(f(x), f(y)) \leqslant d_X(x, y)$.

Nie powinniśmy jednak myśleć o morfizmach jedynie jako funkcjach. Przytoczymy w tym momencie dwa pouczające przykłady.

Przykład 1.1.2 Rozważmy dowolny zbiór X. Utworzymy kategorię $\mathbf{C}$ w następujący sposób: niech $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = X$ (a więc każdy punkt zbioru jest obiektem) oraz

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{C}) = \{\mathrm{id}_x\colon x \in X\},$$

tj. jedynymi morfizmami są identyczności. Czytelnik może łatwo sprawdzić, że wszystkie warunki definicji kategorii są spełnione (w sposób trywialny). Kategorie, w których jedynymi morfizmami są identyczności, nazywamy *dyskretnymi.*

Przykład 1.1.3 Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym[1] relacją $\leqslant$. Podobnie jak poprzednio, niech klasą obiektów będzie zbiór P. Deklarujemy, że dla każdych dwóch elementów $x, y \in P$ istnieje dokładnie jeden morfizm $a \to b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leqslant b$. Zwrotność relacji porządku gwarantuje istnienie identyczności, przechodniość natomiast – prawo składania morfizmów. Jak widać w tym przypadku, morfizmy nie stanowią funkcji.

[1]Relacja $\leqslant$ na zbiorze P jest *częściowym porządkiem*, jeżeli dla wszystkich $x, y, z \in P$ zachodzą następujące warunki:

1. $x \leqslant x$ (zwrotność),
2. $(x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \Rightarrow x = y$ (słaba antysymetria),
3. $(x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$ (przechodniość).

Wygodną formę przedstawiania morfizmów jest *diagram*, który pozwala zilustrować złożenia, dla przykładu:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Zauważmy, że możliwe złożenie $g \circ f$, gdzie $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to C$ na pierwszy rzut oka wydaje się „odwrócone”, tj. niezgodne z kierunkiem strzałek, natomiast jeżeli przyjrzymy się dziedzinom i przeciwdziedzinom, zauważymy, że złożenia należy istotnie czytać „od końca”. Czytelnik powinien się przyzwyczaić do tego stanu rzeczy.

Podstawową własnością diagramu jest jego *przemienność*:

Definicja 1.1.2 (Przemienność diagramu)
Mówimy, że diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

jest przemienny, jeżeli $h = g \circ f$.

Jeżeli diagram *nie jest* przemienny, może się zdarzyć, że $h \neq g \circ f$.

Powyższą definicję możemy oczywiście na większą liczbę przekształceń, w innych konfiguracjach. Dla przykładu przemienność diagramu:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

oznacza równość $g \circ f = k \circ h$. Możemy dzięki temu dorysować kolejną strzałkę $p\colon A \to D$, która spełnia

$$g \circ f = p = k \circ h,$$

zachowując przemienność diagramu. Czytelnik być może rozpoznaje podstawowy fakt z algebry grup zwanym *pierwszym twierdzeniem o izomorfizmie grup*, skrótowo zawartym w *przemiennym* diagramie:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & H \\ & G/\ker\varphi \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

gdzie $\varphi: G \to H$ jest homomorfizmem grup „na”, $\pi: G \to G/\ker\varphi$ – przekształceniem ilorazowym, natomiast ψ – jedynym takim homomorfizmem, że $\psi \circ \pi = \varphi$.

1.2 Morfizmy i ich rodzaje

Tak ogólne pojęcie morfizmu nie pozwala na rozróżnianie ich cech jakościowych. Z doświadczenia wiemy, że niektóre morfizmy (np. homomorfizmy grup) różnią się od siebie – niektóre z nich są różnowartościowe, podczas gdy inne stanowią surjekcje. Teoria kategorii pozwala wyodrębnić niektóre typy morfizmów niezależnie od kategorii, w której się znajdują. W szczególności interesować nas będą morfizmy zachowujące w pełni strukturę obiektu – izomorfizmy.

Definicja 1.2.1 (Izomorfizm)
Mówimy, że morfizm $f: A \to B$ jest *izomorfizmem*, jeżeli istnieje takie $g: B \to A$, że

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{oraz} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B\,. \tag{1.1}$$

Ćwiczenie 1.2.1 Wykaż, że jeżeli $f: A \to B$ jest izomorfizmem oraz g_1, g_2 spełniają warunek (1.1), to $g_1 = g_2$.

Powyższa uwaga pozwala nam mówić o *odwrotności* f oraz przyjąć zapis $f^{-1} = g$. Jeżeli między obiektami A i B istnieje izomorfizm, mówimy, że A i B są *izomorficzne*, tzn. identyczne z punktu widzenia rozważanej struktury. W dalszej części będziemy pisać

$$A \cong B \Leftrightarrow \text{istnieje izomorfizm } f: A \to B.$$

Nietrudno sprawdzić, że:

- izomorfizmami kategorii **Set** są bijekcje,
- izomorfizmami **Top** to homeomorfizmy przestrzeni topologicznych.

W kategoriach algebraicznych (tj. **Grp**, **Vec**, **Rng**) pojęcie izomorfizmu pokrywa się z pojęciem teoriokategoryjnym. We wszystkich podanych kategoriach, w których morfizmy były funkcjami, izomorfizmy z konieczności były bijekcjami. Nie jest jednak prawdą, że każdy bijektywny morfizm jest izomorfizmem:

Przykład 1.2.1 Rozważmy przestrzeń topologiczną $I = [0, 1)$ z topologią naturalną. Istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie ciągłe $f: I \to S$ na okrąg

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

(z topologią dziedziczoną z $\mathbb{R}^2$) niebędące homeomorfizmem.

Ćwiczenie 1.2.2 Uzasadnij powyższe stwierdzenie.

Przy okazji można zauważyć, że powyższe odwzorowanie traktowane jako „goła” funkcja jest izomorfizmem w kategorii **Set**, zapominając o topologii i wymaganiu ciągłości morfizmów.

Jak wiemy chociażby z algebry, możemy mówić o monomorfizmach oraz epimorfizmach. To pojęcie przenosi się na grunt teorii kategorii:

Definicja 1.2.2 (Monomomorfizm)
Mówimy, że $f\colon A \to B$ jest *monomorfizmem* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary $h, k\colon C \to A$ spełniającej $f \circ h = f \circ k$ zachodzi $h = k$.

Innymi słowy możemy lewostronnie „skracać” monomorfizmy – możemy myśleć zatem algebraicznie o tej własności. Czasami, skrótowo, będziemy mówić „f jest mono” zamiast „f jest monomorfizmem”.

Zobaczmy, jak wyglądają monomorfizmy w kategorii **Set**.

Stwierdzenie 1.2.1
W kategorii **Set** funkcja $f\colon A \to B$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa.

Dowód. Załóżmy, że funkcja $f\colon A \to B$ jest monomorfizmem, pokażemy, że f musi być różnowartościowa, tj. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ dla wszelkich $x, y \in A$. Rozważmy singleton $\{p\}$ oraz określmy $a\colon \{p\} \to A$ jako $a(p) = x$ oraz $b\colon \{p\} \to A$, $b(p) = y$, gdzie $x \neq y$ są elementami A. Ponieważ $a \neq b$, z kontrapozycji definicji monomorfizmu otrzymujemy

$$f \circ a \neq f \circ b,$$

a więc

$$f(x) = f(a(p)) \neq f(b(p)) = f(y),$$

co dowodzi różnowartościowości f.

Przeciwną, łatwiejszą, implikację pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. ■

Podobnie sytuacja ma się w kategoriach **Grp**, **Vec**, **Rng** oraz **Top**, gdzie monomorfizmy to dokładnie różnowartościowe homomorfizmy (bądź funkcje ciągłe w przypadku **Top**).

Wyróżnijmy dwie podstawowe własności monomorfizmu:

Stwierdzenie 1.2.2
Niech $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to C$ będą monomorfizmami. Wówczas złożenie $g \circ f$ również jest monomorfizmem.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że dla $g \circ f$ zachodzi prawo lewostronnego skracania. Ustalmy zatem taką parę $h, k\colon D \to A$, że $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. Wówczas zachodzi równość

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k),$$

co pociąga

$$f \circ h = f \circ k,$$

ponieważ g jest monomorfizmem. Ponownie skracając z lewej strony mamy $h = k$, co dowodzi tezy. ■

Stwierdzenie 1.2.3
Załóżmy, że dla $f: A \to B$ oraz $g: B \to C$ złożenie $g \circ f$ jest monomorfizmem. Wówczas f jest monomorfizmem.

DOWÓD. Ustalmy dowolną taką parę $h, k: D \to A$, że $f \circ h = f \circ k$. Wtedy również

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) = (g \circ f) \circ k,$$

a na mocy założenia $h = k$. Pokazaliśmy tym samym, że f jest mono. ■

Jak już ustaliliśmy, nie zawsze morfizmy są funkcjami, tym samym nie powinniśmy myśleć o monomorfizmach jak o injekcjach. Poniżej skonstruujemy przykład, który pokazuje, że nawet wśród kategorii z funkcjami jako morfizmami nasze intuicje mogą być zawodne:

Przykład 1.2.2 Niech A oraz B będą dowolnymi zbiorami oraz niech $f: A \to B$ będzie funkcją, która *nie jest* różnowartościowa. Konstruujemy kategorię $\mathbf{C}$ w następujący sposób: $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = \{A, B\}$, natomiast

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{C}) = \{\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B, f\}.$$

Zwróćmy uwagę, że nie istnieje żaden morfizm $g: B \to A$. Z konieczności zatem jeżeli $f \circ h = f \circ k$, to $h = k$: jeżeli dziedziną h jest A, to jako że dziedziną f również jest A, a przeciwdziedziną B, $h = \mathrm{id}_A$ i wtedy równość spełniona jest trywialnie. Dziedziną h nie może być B, bo, jak zdążyliśmy zauważyć, nie istnieje żaden morfizm odsyłający B w A. Tym samym f jest monomorfizmem nieróżnowartościowym.

Zauważmy, że w podanym przykładzie nie było istotne, jak dokładnie zachowuje się funkcja f. Mówiąc nieformalnie, kategoria $\mathbf{C}$ nie „zagląda" do środka obiektów i morfizmów.

Dualnym pojęciem do monomorfizmu jest pojęcie epimorfizmu:

Definicja 1.2.3 (Epimorfizm)
Mówimy, że $f: A \to B$ jest *epimorfizmem* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary $h, k: B \to C$ spełniającej $h \circ f = h \circ k$ zachodzi $h = k$.

Dla wygody zamiast pisać „f jest epimorfizmem", będziemy posługiwać się krótszym wyrażeniem „f jest epi". Czytelnik, wzorując się na poprzednich dowodach, łatwo może wykazać, że:

Stwierdzenie 1.2.4
Niech $f: A \to B$ oraz $g: B \to C$ będą morfizmami. Jeżeli f oraz g są epi, to i złożenie $g \circ f$ jest epi. Ponadto, jeżeli wiadomo, że $g \circ f$ jest epimorfizmem, to g jest epi.

Nie będzie dla nas zdziwieniem, że w kategorii **Set** epimorfizmami są dokładnie funkcje „na”: jeżeli funkcja $f\colon A \to B$ jest surjekcją, a $h, k\colon B \to C$ takimi funkcjami, że $h \circ f = k \circ f$, to dla każdego $y \in B$ istnieje taki $x \in X$, że $f(x) = y$. Tym samym

$$h(y) = h(f(x)) = k(f(x)) = k(y),$$

co dowodzi równości $h = k$.

Sprawdzenie przeciwnej implikacji pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie[2]. Nie należy jednak utożsamiać pojęcia epimorfizmu z surjekcjami! Nie sięgając daleko, możemy w kategorii **Rng** znaleźć różnowartościowy (!) epimorfizm niebędący surjekcją:

Przykład 1.2.3 Rozważmy homomorfizm pierścieni $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ zanurzający pierścień liczb całkowitych w ciało liczb wymiernych. Pokażemy, że i jest epimorfizmem. Rozważmy homomorfizmy pierścieni $h, k\colon \mathbb{Q} \to R$, dla których $h \circ i = k \circ i$. Ponieważ $i(n) = n \in \mathbb{Q}$, mamy

$$h(i(n)) = h(n) = k(n) = k(i(n))$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$. Niech $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Wówczas

$$h\left(\tfrac{a}{b}\right) = h\left(a \cdot \tfrac{1}{b}\right) = h(a)h\left(\tfrac{1}{b}\right)$$

jako że h jest homomorfizmem pierścieni. Na podstawie poprzedniej równości wiemy, że $h(a) = k(a)$, zatem

$$h(a)h\left(\tfrac{1}{b}\right) = k(a)h\left(\tfrac{1}{b}\right) = k(b \cdot \tfrac{a}{b})h\left(\tfrac{1}{b}\right) = k(b)k\left(\tfrac{a}{b}\right)h\left(\tfrac{1}{b}\right).$$

Skoro $k(b) = h(b)$, to

$$k(b)k\left(\tfrac{a}{b}\right)h\left(\tfrac{1}{b}\right) = h(b)k\left(\tfrac{a}{b}\right)h\left(\tfrac{1}{b}\right) = h(b)h\left(\tfrac{1}{b}\right)k\left(\tfrac{a}{b}\right) = h\left(b \cdot \tfrac{1}{b}\right)k\left(\tfrac{a}{b}\right).$$

Ostatecznie

$$h\left(\tfrac{a}{b}\right) = h\left(b \cdot \tfrac{1}{b}\right)k\left(\tfrac{a}{b}\right) = h(1)k\left(\tfrac{a}{b}\right) = k(1)k\left(\tfrac{a}{b}\right) = k\left(1 \cdot \tfrac{a}{b}\right) = k\left(\tfrac{a}{b}\right).$$

Czyli $h = k$, co należało wykazać.

Natomiast prawdziwe pozostaje następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 1.2.5
Jeżeli $\varphi\colon R \to S$ jest surjektywnym homomorfizmem pierścieni, to jest epimorfizmem.

Ćwiczenie 1.2.3 Uzasadnij powyższy fakt.

Wskazówka: Wykorzystaj podany fakt, że funkcje „na” spełniają ogólną własność $h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$.

[2] Wystarczy wnikliwie przetłumaczyć podany dowód dla monomorfizmów, „odwracając” strzałki, tj. kierunek morfizmów.

Inny, równie istotny, przykład znaleźć możemy w kategorii **Haus** przestrzeni Hausdorffa[3]:

Stwierdzenie 1.2.6
Funkcja ciągła $f: X \to Y$ między przestrzeniami Hausdorffa jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy ma gęsty obraz.

Przed dowodem tego stwierdzenia, odnotujmy następujący fakt:

Fakt 1.2.1
Jeżeli funkcje ciągłe $f, g: X \to Y$, gdzie Y jest przestrzenią Hausdorffa, spełniają warunek

$$f(x) = g(x), \quad x \in D$$

dla pewnego zbioru gęstego $D \subseteq X$, to $f = g$.

By uzasadnić powyższy fakt, zauważmy, że gdyby $f(x) \neq g(x)$ dla pewnego $x \in X$, to istniałyby dwa rozłączne zbiory U oraz V, dla których $f(x) \in U$ oraz $g(x) \in V$. Zbiór $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ jest niepusty, bo zawiera x, oraz jest otwarty jako przekrój dwóch zbiorów otwartych, ponieważ funkcje f i g były ciągłe. Z drugiej strony na zbiorze W funkcje f oraz g muszą się różnić, bo U oraz V są rozłączne. Jako że zbiór D jest gęsty, przecina zbiór W w pewnym punkcie y. Ale z założenia $f(y) = g(y)$, co przeczy poprzedniej uwadze. Zatem $f(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

W dowodzie wykorzystamy ogólną konstrukcję następującej postaci: niech Z będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $F \subseteq Z$ będzie pewnym podzbiorem. Konstruujemy przestrzeń $Z' = Z_1 \sqcup Z_2$ będącą sumą rozłączną[4] dwóch kopii Z (tj., Z_1, Z_2 są przestrzeniami homeomorficznymi z Z). Poprzez oznaczenie z_1 oraz z_2 będziemy rozumieć kopię tego samego punktu $z \in Z$ odpowiednio w Z_1 i Z_2. W Z' określmy relację równoważności $z_1 = z_2$ dla każdego $z \in F$, tj. utożsamiamy punkty zbioru F obu kopii, a następnie tworzymy przestrzeń ilorazową[5] Z_F względem tak wprowadzonej relacji równoważności. Czytelnik może sprawdzić, że jeżeli Z jest przestrzenią Hausdorffa, natomiast F

[3]Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna X jest *przestrzenią Hausdorffa* (lub: *spełnia aksjomat oddzielania* T_2), jeżeli dla każdych dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieją takie zbiory rozłączne otwarte U, V, że $x \in U$ oraz $y \in V$.

[4]Dla dowolnych zbiorów A oraz B możemy wprowadzić tzw. sumę rozłączną:

$$A \sqcup B = \{(a,0): a \in A\} \cup \{(b,1): b \in B\}.$$

Jeżeli A oraz B były przestrzeniami topologicznymi, można zadać topologię na $A \sqcup B$ jako najmniejszą topologię, przy której włożenia $\varphi_1: A \to A \sqcup B$, $\varphi_2: B \to A \sqcup B$ zadane jako

$$\varphi_1(a) = (a,0), \quad \varphi_2(b) = (b,1)$$

są ciągłe. Równoważnie: podzbiór $U \subseteq A \sqcup B$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy $\varphi_1^{-1}(U)$, $\varphi_2^{-1}(U)$ są otwarte odpowiednio w A i B. Suma rozłączna stanowi formę *koproduktu*, o których powiemy więcej w dalszej części.

[5]Przypomnijmy, że jeżeli X jest przestrzenią topologiczną z topologią τ, a $\sim$ relacją równoważności określoną na zbiorze X, możemy utworzyć przestrzeń ilorazową $X/_\sim$, to jest przestrzeń wszystkich klas równoważności wyznaczonych przez relację $\sim$, z topologią

$$\tau/_\sim = \left\{U \subseteq X/_\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau\right\},$$

gdzie $\pi: X \to X/_\sim$ przyporządkowuje x jego klasę abstrakcji $[x]_\sim$.

jego podzbiorem domkniętym, tak uzyskana przestrzeń Z_F również jest przestrzenią Hausdorffa.

DOWÓD. Przypuśćmy, że $f: X \to Y$ ma gęsty obraz w Y. Niech $h, k: Y \to Z$ będą dwoma funkcjami ciągłymi takimi, że $h \circ f = k \circ f$. Wówczas, ponieważ $f(X)$ jest gęstym podzbiorem Y, funkcje h oraz k zgadzają się na pewnym podzbiorze gęstym, a więc, na mocy poprzedzającej uwagi, $h = k$.

Dla dowodu przeciwnej implikacji przyjmijmy, że dla funkcji ciągłej $f: X \to Y$, $f(X)$ *nie jest* gęste. Określmy $Z = \overline{f(X)}$ jako domknięcie obrazu przestrzeni X poprzez f, wtedy $Z \neq Y$.

Niech Y_Z będzie przestrzenią skonstruowaną według poprzedniej uwagi, a $h, k: Y \to Y_Z$ funkcjami zadanymi jako

$$h(x) = [x_1], \quad k(x) = [x_2],$$

gdzie $[y_i]$ stanowi klasę równoważności w Y_Z o reprezentancie x_i. Funkcje te są różne, ponieważ $Z \subsetneq Y$, natomiast zgadzają się na zbiorze Z (wprost z definicji przestrzeni Y_Z). Stąd też $h \circ f = k \circ f$, ale $h \neq k$. ■

Przekonamy się w dalszej części, że wyróżnienie mono/epimorfizmów jest wciąż zbyt ogólne: dla przykładu topologiczne przekształcenie ilorazowe (zanurzenie kanoniczne $\pi: X \to X/_{\sim}$) jest, jak zobaczymy, czymś silniejszym od pojęcia epimorfizmu. Zwróćmy także uwagę, że w ogólności nieprawdą jest stwierdzenie, że każdy monomorfizm, który jest epi, jest izomorfizmem: podany poprzednio przykład przekształcenia odcinka na okrąg w kategorii **Top** stanowi kontrprzykład i dla tego stwierdzenia (sprawdź!). Natomiast z całą pewnością możemy stwierdzić, że:

Ćwiczenie 1.2.4 Wykaż, że każdy izomorfizm $f: A \to B$ jest zarówno mono, jak i epi.

Z kolei w niektórych kategoriach (najczęściej algebraicznych) istotnie izomorfizmy to dokładnie *bimorfizmy* – morfizmy jednocześnie mono oraz epi. Takimi kategoriami są m.in. **Grp**, **Vec** czy **Rng**.

Ćwiczenie 1.2.5 Pokaż, że w kategorii ciał **Fld** każdy epimorfizm jest izomorfizmem.

Wskazówka: Czy istnieją nieróżnowartościowe homomorfizmy ciał?

Z powyższego faktu skorzystamy w następnej części.

1.3 Produkty, koprodukty

W różnych gałęziach matematyki możemy spotkać się z produktem – czy to iloczynem kartezjańskim zbiorów, produktem Tichonowa przestrzeni topologicznych czy produkcie grup algebraicznych. Okazuje się, że operację tworzenia produktu daje się wyabstrahować na gruncie teorii kategorii, ujmując ją za pomocą charakteryzacji wyrażonej w języku morfizmów. Zdefiniujemy produkt obiektów poprzez tak zwaną *własność uniwersalną*:

Definicja 1.3.1 (Produkt)
Produktem obiektów X_1, X_2 nazywamy obiekt X oznaczany jako $X_1 \times X_2$ wraz z parą morfizmów $\pi_1 : X \to X_1$, $\pi_2 : X \to X_2$, nazywanych *naturalnymi rzutowaniami*, spełniającą następującą własność uniwersalną: dla każdego obiektu Y oraz pary morfizmów oraz pary morfizmów $f_1 : Y \to X_1$, $f_2 : Y \to X_2$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f : Y \to X$, że poniższy diagram

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & X \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

jest przemienny.

Zauważmy, że sam obiekt $X_1 \times X_2$ nie stanowi produktu: definicja uwzględnia obiekt wraz z parą morfizmów. Definicję możemy rozszerzyć na dowolną niepustą[6] rodzinę obiektów $(X_i)_{i \in I}$: produktem rodziny obiektów $(X_i)_{i \in I}$ (oznaczanym jako $\prod_{i \in I} X_i$) nazywamy taki obiekt X wraz z rodziną morfizmów $(\pi_i)_{i \in I}$, gdzie $\pi_i : X \to X_i$, że dla każdego obiektu Y oraz rodziny morfizmów $(f_i)_{i \in I}$, $f_i : Y \to X_i$, istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f : Y \to X$, dla którego poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
X \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Innymi słowy, postulujemy istnienie dokładnie jednego morfizmu spełniającego $f_i = \pi_i \circ f$ dla każdego $i \in I$.

Należałoby się upewnić, że tak postawiona definicja zgadza się z konkretnymi realizacjami produktu w odpowiednich kategoriach.

Przykład 1.3.1 W kategorii zbiorów **Set** produkt w powyższym sensie pokrywa się z produktem zbiorów: dla dowolnej rodziny $(X_i)_{i \in I}$ określamy

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} : \forall_{i \in I} \, x_i \in X_i \right\}$$

wraz z projekcjami $(\pi_i)_{i \in I}$, $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ zadanymi jako

$$\pi_j \left((x_i)_{i \in I} \right) = x_j .$$

Dla każdego zbioru Y oraz rodziny funkcji $(f_i)_{i \in I}$, $f : Y \to X_i$ przekształcenie $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ postaci

$$f(y) = \left(f_i(y) \right)_{i \in I}$$

[6] Póki co, bez dodatkowego pojęcia *obiektu końcowego*, nie jesteśmy w stanie określić, czym byłby pusty produkt w danej kategorii.

jest jedynym odwzorowaniem spełniającym równość $f_i = \pi_i \circ f$ dla każdego $i \in I$.

Przykład 1.3.2 Dla dowolnej rodziny przestrzeni topologicznych w kategorii **Top** można utworzyć produkt (jako zbiór), wyposażając go w najmniejszą topologię, przy której wszystkie rzutowania są ciągłe. Taka topologia nosi nazwę *topologii produktowej* i spełnia abstrakcyjną własność uniwersalną produktu.

W poprzedniej części skonstruowaliśmy małą kategorię na podstawie zbioru częściowo uporządkowanego. I dla takich kategorii pojęcie produktu ma (znany) sens:

Przykład 1.3.3 Niech $(P, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, natomiast **C** – kategorią skonstruowaną tak jak w przykładzie 1.1.3. Niech $x, y \in P$ będą dwoma dowolnymi elementami. Załóżmy, że $z = x \times y$ jest produktem elementów $x, y \in P$ w sensie definicji 1.3.1. Wówczas istnieje para morfizmów $z \to x$ oraz $z \to y$, tj. $z \leqslant x$ oraz $z \leqslant y$. Ponadto dla każdej pary $w \to x$ oraz $w \to y$ (a więc $w \leqslant x, y$) istnieje dokładnie jeden[7] morfizm $w \to z$, tj. $w \leqslant z$.

A zatem dla każdego elementu $w \in P$ mniejszych wspólnie od x, y, element w nie przekracza z. Jest to nic innego jak definicja *kresu dolnego* dwóch elementów zbioru częściowo uporządkowanego. Produkt w sensie teoriokategoryjnym pokrywa się więc z kresem dolnym, tj. $x \times y = \inf\{x, y\}$.

Łatwo sprawdzić, że, na tej samej zasadzie, dla podzbioru $A \subseteq P$ produkt $\prod_{a \in A} a$ równy jest $\inf A$.

Z powyższego przykładu można odczytać m.in., że przekrój zbiorów $A \cap B \subseteq X$ jest produktem w zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(X)$ zbioru X. Podobnie największy wspólny dzielnik $\mathrm{NWD}(n_1, \dots, n_k)$ liczb naturalnych $n_1, \dots, n_k$ jest produktem w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\mathbb{N}, |)$, gdzie $|$ stanowi relację podzielności.

Nie zawsze kres dolny w zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje. Tym samym nie w każdej kategorii dla wszystkich obiektów istnieje ich produkt.

Przykład 1.3.4 Rozważmy kategorię ciał **Fld**. Niech K będzie dowolnie ustalonym ciałem. Przypuśćmy, że istnieje produkt $K \times K$ wraz z parą naturalnych rzutowań $\pi_1, \pi_2 \colon K \times K \to K$. Rozważmy parę morfizmów $(\mathrm{id}_K, \mathrm{id}_K)$; rozkłada się ona względem π_1, π_2 zgodnie z poniższym przemiennym diagramem:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "\mathrm{id}_K"'] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_K"] & \\ K & K \times K \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & K \end{tikzcd}$$

Ponieważ id_K jest epimorfizmem, na mocy 1.2.4 π_1, π_2 również są epi, a więc jako zanurzenia ciał (patrz: ćwiczenie 1.2.5) muszą być izomorfizmami. Zatem

$$\pi_1 = \mathrm{id}_K = \pi_2 \quad \text{oraz} \quad K \times K \cong K.$$

[7]Zauważmy, że jedyność jest zagwarantowana z konstrukcji kategorii.

Korzystając z własności uniwersalnej produktu, dla dowolnych zanurzeń ciał $\varphi_1, \varphi_2 \colon L \to K$ istnieje jedyny taki homomorfizm ciał $\varphi \colon L \to K \times K$, że

$$\varphi_1 = \pi_1 \circ \varphi = \varphi = \pi_2 \circ \varphi = \varphi_2$$

jako że π_1, π_2 są w rzeczywistości identycznościami K. A zatem każde dwa homomorfizmy ciał $L \to K$ muszą się pokrywać.

W szczególności dla $L = K = \mathbb{C}$ z powyższego wynikałoby, że nie istnieje nietrywialny automorfizm ciała liczb zespolonych, co jest sprzeczne z istnieniem sprzężenia $z \mapsto \overline{z}$.

O kategoriach, w których dla dowolnej rodziny obiektów istnieje produkt, mówimy, że posiadają produkty. Zaznaczmy także, że produkt, o ile istnieje, jest zawsze jednoznacznie wyznaczony. Dokładniej rzecz ujmując:

Stwierdzenie 1.3.1
Załóżmy, że dla rodziny obiektów $(X_i)_{i \in I}$ istnieją dwa produkty X, X' spełniające własność uniwersalną produktu. Wówczas $X \cong X'$.

Dowód. Niech $(\pi_i)_{i \in I}$ oraz $(\pi'_i)_{i \in I}$ będą naturalnymi rzutowaniami odpowiednio dla X oraz X'. Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
X_i & X' \arrow[l, "\pi'_i"'] \arrow[dr, "\pi'_i"] \arrow[d, shift left, "f"] & \\
& X \arrow[ul, "\pi_i"] \arrow[u, shift left, "g"] \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Z określenia produktu powyższy diagram jest przemienny (dla doboru $Y = X'$ oraz $f_i = \pi'_i$ dla prawej strony z własności produktu X oraz $Y = X$, $f_i = \pi_i$ z własności produktu X' dla lewej strony), ponadto funkcja $f \colon X' \to X$ spełniająca $\pi'_i \circ f = \pi_i$ dla każdego $i \in I$ wyznaczona jest w sposób jednoznaczny. Na podobnej zasadzie istnieje jedyne $g \colon X \to X'$, dla którego zachodzi tożsamość $\pi_i \circ g = \pi'_i$, $i \in I$. Łącząc powyższe równości, uzyskujemy

$$\pi_i \circ \mathrm{id}_X = \pi_i = \pi'_i \circ g = (\pi_i \circ f) \circ g = \pi_i \circ (f \circ g).$$

Zatem, ponieważ zarówno dla morfizmu $h = \mathrm{id}_X$, jak i $h = f \circ g$, diagram

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\
X \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

jest przemienny dla każdego $i \in I$, to z jedyności h (dla doboru $f_i = \pi_i$ z własności uniwersalnej produktu) musi zachodzić $\mathrm{id}_X = f \circ g$. Analogicznie zachodzi $\mathrm{id}_{X'} = g \circ f$, a więc $X \cong X'$. ■

Powyższy fakt uzasadnia stosowanie jednego symbolu $\prod_{i\in I} X_i$ dla produktu rodziny obiektów, co zagwarantowane jest dzięki jedyności postulowanego morfizmu f o własności $f_i = \pi_i \circ f$ dla każdego $i \in I$.

Tak jak iloczyn kartezjański, produkt w sensie teorii kategorii jest łączny. Dokładniej:

Ćwiczenie 1.3.1 Dla dowolnych obiektów X, Y, Z zachodzi $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$, o ile produkty te istnieją.

Wskazówka: Rozważ następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & (X \times Y) \times Z \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, "a_2"] \arrow[ddl, dashed, "g"] & & \\
X & X \times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] & Y & Y \times Z \arrow[l, "q_1"'] \arrow[r, "q_2"] & Z \\
 & X \times (Y \times Z) \arrow[ul, "b_1"] \arrow[u, dashed, "i"] \arrow[urr, "b_2"'] \arrow[uur, dashed, "f"] & & &
\end{tikzcd}$$

gdzie morfizmy zaznaczone przerywaną strzałką są jedynymi morfizmami spełniającymi własność uniwersalną produktu (dla doboru odpowiednich obiektów i morfizmów). Wykaż następujące równości:

$$q_i \circ b_2 \circ (f \circ g) = g_i \circ b_2 \circ \mathrm{id}_{X\times(Y\times Z)}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Ćwiczenie 1.3.2 Wykaż, że produkt jednoelementowej rodziny postaci $\prod\{X\}$ jest izomorficzny z X. Czy zachodzi równość $\prod\{X\} = X$?

Tak jak pojęcie epimorfizmu było, w pewnym sensie, pojęciem dualnym dla pojęcia monomorfizmu, tak i w przypadku pojęcia produktu możemy mówić o pojęciu dualnym, „odwracając" kierunki morfizmów. Tym pojęciem jest *koprodukt*.

Definicja 1.3.2 (Koprodukt)

Koproduktem rodziny obiektów $(X_i)_{i\in I}$ (oznaczanym jako $\coprod_{i\in I} X_i$) nazywamy taki obiekt X wraz z rodziną morfizmów $(\iota)_{i\in I}$ zwanych *naturalnymi włożeniami*, gdzie $\iota_i\colon X_i \to X$, że dla każdego obiektu Y oraz rodziny morfizmów $(f_i)_{i\in I}$, $f_i\colon X_i \to Y$, istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f\colon X \to Y$, dla którego poniższy diagram

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

jest przemienny, tj. $f_i = f \circ \iota_i$ dla każdego $i \in I$.

Dowody dotyczące produktów daje się „przetłumaczyć” na dowody dla obiektów dualnych, wykorzystując zasadę dualności, o której będzie mowa w dalszej części tego skryptu.

Ćwiczenie 1.3.3 Wykaż, że koprodukt w kategoriach **Set**, **Top** pokrywa się z sumą rozłączną zbiorów/przestrzeni.

Przypomnijmy, że sumę rozłączną rodziny zbiorów $(X_i)_{i\in I}$ określić możemy jako

$$\coprod_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I} \{(x,i) : x \in X_i\},$$

gdzie dodatkowo zadać możemy rodzinę włożeń $(\iota_i)_{i\in I}$:

$$\iota_i : X_i \to \coprod_{i\in I} X_i, \quad \iota_i(x) = (x,i), \quad i \in I.$$

Dla rodziny przestrzeni topologicznych na powyższym zbiorze możemy wprowadzić topologię spełniającą dla każdego $i \in I$ następujący warunek: zbiór $\iota_i[X_i]$ jest otwarty w $\coprod_{j\in I} X_j$ oraz, traktowany jako podprzestrzeń sumy rozłącznej, jest homeomorficzny z X_i. Innymi słowy, możemy określić na $\coprod_{i\in I} X_i$ największą topologię, dla których włożenia ι_i są ciągłe dla każdego $i \in I$.

Ćwiczenie 1.3.4 Niech $(P, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, niech ponadto kategoria **C** określona będzie jak w przykładzie 1.1.3. Wykaż, że dla $A \subseteq P$ zachodzi równość

$$\coprod_{a\in A} a = \sup A,$$

o ile kres górny A istnieje.

1.4 Obiekty początkowe i końcowe

W tej części poznamy specjalne obiekty kategorii oraz przyjrzymy się nieco bliżej strukturze $\mathrm{Hom}(A,B)$ morfizmów między ustalonymi obiektami A oraz B.

Definicja 1.4.1 (Obiekt początkowy/końcowy)
Obiekt I nazywamy *obiektem początkowym*, jeżeli dla każdego obiektu X istnieje dokładnie jeden morfizm $I \to X$. Obiekt T nazywamy *obiektem końcowym*, jeżeli dla każdego obiektu X istnieje dokładnie jeden morfizm $X \to T$. Obiekt O nazywamy *obiektem zerowym*, jeżeli jest zarówno początkowy, jak i końcowy.

Stwierdzenie 1.4.1
Jeżeli obiekt początkowy (bądź końcowy) w kategorii istnieje, to jest on jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Ćwiczenie 1.4.1 Uzasadnij powyższe stwierdzenie.

Przykład 1.4.1 W kategorii:

- **Set** obiektem początkowym jest zbiór pusty, natomiast końcowy – zbiór jednoelementowy,
- **Rel** zbiorów oraz relacji dwuargumentowych zbiór pusty jest zarówno obiektem początkowym, jest i końcowym,
- **Grp**, $\mathbf{Vec}_K$ (przestrzeni liniowych nad ustalonym ciałem K) obiektem zerowym jest grupa/przestrzeń liniowa trywialna (jednoelementowa),
- **Rng** pierścieni (z jedynką) obiektem początkowym jest pierścień liczb całkowitych.

Ćwiczenie 1.4.2 Dla każdego pierścienia R skonstruuj odwzorowanie $\mathbb{Z} \to R$ i wykaż jedyność takiego odwzorowania.

Wskazówka: Porównaj przykład 1.2.3.

Z poprzedniego stwierdzenia jest jasne, że kategorie zbiorów czy przestrzeni topologicznych nie posiadają obiektu zerowego. Ogólniej, jeżeli $I \ncong T$, to kategoria nie posiada obiektów zerowych. Obiekty zerowe często występują w kategoriach algebraicznych, szczególnie w tzw. *ciągach dokładnych*[8].

Przykład 1.4.2 W kategorii ciał **Fld** nie istnieje obiekt początkowy/zerowy. W podkategorii ciał $\mathbf{Fld}_p$ charakterystyki p obiektem początkowym jest ciało skończone $\mathbb{Z}_p$.

By dowieść pierwszego stwierdzenia, wystarczy zauważyć, że nie istnieją homomorfizmy ciał dla ciał F oraz K o różnej charakterystyce. Istotnie, jeżeli $\varphi\colon F \to K$ jest morfizmem, gdzie $\operatorname{char} F = p$ dla pewnej liczby pierwszej $p \in \mathbb{P}$, to skoro

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p \text{ razy}} = 0,$$

to

$$0 = \varphi(0) = \varphi(p) = \varphi(p \cdot 1) = \underbrace{\varphi(1) + \ldots + \varphi(1)}_{p \text{ razy}} = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{p \text{ razy}}.$$

Stąd $\operatorname{char} K = p$. Jeżeli ciało F było charakterystyki 0, to, jako przekształcenie różnowartościowe, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nie może zachodzić $\varphi(n) = 0$, w przeciwnym razie $n = 0$. Zatem i w tym przypadku $\operatorname{char} F = 0 = \operatorname{char} K$.

Zatem gdyby I było obiektem początkowym charakterystyki p, nie istniałby morfizm $I \to F$ dla ciała F o innej charakterystyce wbrew definicji obiektu początkowego. Analogicznie możemy argumentować dla obiektu końcowego. Kategoria **Fld** nie posiada żadnego z obiektów tego rodzaju.

Jeżeli jednak zawęzimy się do kategorii ciał o ustalonej charakterystyce p dla pewnej liczby pierwszej, możemy pokazać, że $\mathbb{Z}_p$ jest obiektem zerowym. Ustalmy ciało F charakterystyki p. Wówczas jedynym homomorfizmem ciał jest zanurzenie $\varphi\colon \mathbb{Z}_p \to F$, które jednoznacznie określone jest warunkami

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

[8] Pojęcie to nie będzie w tym momencie określane.

Ćwiczenie 1.4.3 Scharakteryzuj obiekty początkowe/końcowe/zerowe (o ile istnieją) w kategorii utworzonej na zbiorze częściowo uporządkowanym w przykładzie 1.1.3.

Dla każdych dwóch obiektów A oraz B kategorii $\mathbf{C}$ możemy wyróżnić podklasę $\mathrm{Hom}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbf{C})$ morfizmów $A \to B$. W wielu przypadkach podklasa ta będzie tworzyć zbiór. W szczególnym przypadku, gdy $A = B$, możemy mówić o *endomorfizmach* obiektu:

$$\mathrm{End}(A) = \mathrm{Hom}(A,A).$$

Podklasą endomorfizmów są tzw. *automorfizmy* – izomorfizmy obiektu w siebie. W ogólnym przypadku badanie struktury endomorfizmów/automorfizmów jest trudne. Struktura ta bowiem zależy zarówno od całej kategorii, która „wymusza” pewne własności endomorfizmów, a także od specyfiki samego obiektu tej kategorii.

Przykład 1.4.3 Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ traktowany jako obiekt:

- kategorii **Set** posiada $2^{\mathfrak{c}}$ funkcji (endomorfizmów) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz tyle samo bijekcji permutacji (automorfizmów),
- kategorii **Fld** ma tylko jeden automorfizm – identyczność[9].

Zdarza się, że struktura endomorfizmów/automorfizmów zależy od przyjętej aksjomatyki. Rozważmy „pośredni” przykład kategorii grup:

Przykład 1.4.4 Rozważmy grupę addytywną $(\mathbb{R},+)$ w kategorii **Grp**. Jeżeli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest izomorfizmem, można pokazać, że dla każdych $q \in \mathbb{Q}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\varphi(qx) = q\varphi(x)$. Tym samym każdy taki automorfizm jest jednocześnie automorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{Q}$. Przy założeniu pewnika wyboru dla doboru dwóch różnych (nieprzeliczalnych) baz Hamela $(e_i)_{i\in I}$, $(e'_i)_{i\in I}$ przekształcenie φ wyznaczone jednoznacznie warunkiem

$$f(e_i) = e'_i, \quad i \in I$$

jest automorfizmem $(\mathbb{R},+)$. Zbiór wszystkich automorfizmów jest więc mocy $2^{\mathfrak{c}}$.

Sytuacja drastycznie zmienia charakter, jeżeli aksjomat wyboru nie zachodzi. Dla przykładu, przy założeniu aksjomatu determinacji[10], każdy automorfizm $\mathbb{R}$ jest z konieczności ciągły, a każdy taki automorfizm jest postaci $\varphi(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tym samym grupa automorfizmów ciała $\mathbb{R}$ jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ mocy $\mathfrak{c}$.

Powróćmy w tym miejscu do obiektów końcowych. Dla każdego obiektu początkowego I zachodzi w trywialny sposób

$$\mathrm{Aut}(I) = \mathrm{End}(I) = \{\mathrm{id}_I\}.$$

Zachodzi pewien związek między produktami a obiektami końcowymi kategorii:

[9] Z kolei dla ciała $\mathbb{C}$ możemy na gruncie pewnika wyboru otrzymać $2^{\mathfrak{c}}$ różnych automorfizmów tego ciała, z czego tylko dwa – identyczność oraz sprzężenie – są ciągłe.

[10] Nie będziemy wchodzić w tym miejscu w detale.

Stwierdzenie 1.4.2
Jeżeli kategoria posiada obiekt końcowy T, to pusty produkt $\prod_{\varnothing}$ jest izomorficzny z T.

By udowodnić to stwierdzenie, wprowadzimy pojęcia *diagramu* oraz *granicy diagramu.*

Rozdział 2

Funktory, diagramy, granice

2.1 Kategorie dualne, zasada dualności

Do tej pory kategorie były rozważane w odizolowaniu od innych struktur. Przekształcenia obiektów (i morfizmów) jednej struktury w drugą nazywać będziemy *funktorami* – dokładna definicja pojawi się w tej części skryptu. Zanim jednak przedstawimy to pojęcie, sformułujemy zapowiadaną wcześniej zasadę dualności.

Definicja 2.1.1 (Kategoria dualna)
Niech $\mathbf{C}$ będzie dowolną kategorią. Kategorię $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ złożoną z obiektów kategorii $\mathbf{C}$, dla której dla każdych obiektów $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ zachodzi[1] $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$, gdzie ponadto zachodzi

$$f \circ_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}} g = g \circ_{\mathbf{C}} f$$

dla wszystkich morfizmów, nazywamy *kategorią dualną* bądź *przeciwną* do kategorii $\mathbf{C}$.

Innymi słowy kategoria dualna powstaje przez „odwrócenie" kierunków strzałek morfizmów. W dalszej części, przy ustalonej kategorii $\mathbf{C}$, zamiast pary $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ będziemy pisać po prostu Hom oraz $\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}$, podobnie $\circ/\circ^{\mathrm{op}}$ zamiast $\circ_{\mathbf{C}}/\circ_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$.

Przykład 2.1.1 Jeżeli kategoria $\mathbf{C}$ utworzona jest ze zbioru częściowo uporządkowanego $(P, \leqslant)$ (patrz przykład 1.1.3), kategorią $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ przeciwną do $\mathbf{C}$ jest kategoria utworzona ze zbioru częściowo uporządkowanego $(P, \geqslant)$.

Przykład 2.1.2 Niech M będzie monoidem[2]. Wówczas możemy utworzyć kategorię $\mathbf{M}$ w następujący sposób:

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{M}) = \{M\}, \quad \mathrm{Hom}(M, M) = M, \quad \mathrm{id}_M = e, \quad y \circ x = y \cdot x.$$

[1] Zapis $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ oznacza klasę morfizmów $A \to B$ w kategorii $\mathbf{C}$, natomiast $f \circ_{\mathbf{C}} g$ – złożenie morfizmów f oraz g w kategorii $\mathbf{C}$.

[2] Zbiór S wraz z łącznym działaniem $\cdot : S \times S \to S$ nazywamy *półgrupą*. Jeżeli w S występuje ponadto *element neutralny* $e \in S$, tj. element spełniający $a \cdot e = a = e \cdot a$ dla wszystkich $a \in S$, półgrupę S nazywamy *monoidem*.

Kategorią dualną $\mathbf{M}^{\mathrm{op}}$ jest kategoria, dla której zachodzi

$$y \circ^{\mathrm{op}} x = x \cdot y.$$

Okazuje się, że każde stwierdzenie dotyczące obiektów i morfizmów kategorii $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ może zostać przetłumaczone na logicznie równoważne zdanie dotyczące własności kategorii $\mathbf{C}$. Rozważmy następujące stwierdzenie:

$$P_{\mathbf{C}}(X) \equiv \text{dla każdego obiektu } A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \text{ istnieje dokładnie jeden morfizm } f\colon A \to X.$$

Jeżeli zastąpimy w powyższej funkcji zdaniowej obiekty kategorii $\mathbf{C}$ obiektami kategorii dualnej $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, podobnie dla morfizmów, uzyskamy analogiczne zdanie dla kategorii przeciwnej:

$$P_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(X) \equiv \text{dla każdego obiektu } A^{\mathrm{op}} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}) \text{ istnieje dokładnie jeden morfizm } f^{\mathrm{op}}\colon A \to X,$$

które można przetłumaczyć na język kategorii $\mathbf{C}$, „odwracając” kierunek morfizmów w następujący sposób:

$$P^{\mathrm{op}}_{\mathbf{C}}(X) \equiv \text{dla każdego obiektu } A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) \text{ istnieje dokładnie jeden morfizm } f\colon X \to A.$$

Zwróćmy uwagę, że własność $P_{\mathbf{C}}(X)$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy X jest obiektem końcowym kategorii $\mathbf{C}$. Jak wiemy z kategorii **Set**, obiektami końcowymi są singletony (patrz przykład 1.4.1). Z kolei własność $P^{\mathrm{op}}_{\mathbf{C}}(X)$ definiuje obiekty początkowe, którym we wspomnianej kategorii jest jedynie zbiór pusty. Widać więc, że na ogół własności $P_{\mathbf{C}}(X)$ nie są równoważne $P^{\mathrm{op}}_{\mathbf{C}}(X)$.

Własność $P_{\mathbf{C}}(X)$ nazywamy *samosprzężoną*, jeżeli własność $P^{\mathrm{op}}_{\mathbf{C}}(X)$ jest jej równoważna dla wszystkich X. Dla przykładu własność (w dowolnej kategorii)

$$P(X) \equiv X \text{ jest obiektem zerowym}$$

jest samosprzężona. Pojęciem samosprzężonym jest np. pojęcie izomorfizmu; co należy rozumieć jako: $f\colon A \to B$ jest izomorfizmem w kategorii $\mathbf{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest izomorfizmem w $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. Podobnie samosprzężone są identyczności obiektów.

Podobnie możemy tłumaczyć własności dotyczące morfizmów: dla przykładu, jeżeli $Q_{\mathbf{C}}(f)$ dla $f\colon A \to B$ oznacza

$$Q_{\mathbf{C}}(f) \equiv \text{istnieje morfizm } g\colon B \to A, \text{ że zachodzi } g \circ f = \mathrm{id}_A,$$

to własność dualna brzmi:

$$Q^{\mathrm{op}}_{\mathbf{C}}(f) \equiv \text{istnieje morfizm } g\colon A \to B, \text{ że zachodzi } f \circ g = \mathrm{id}_A,$$

gdzie f jest tym razem typu $f\colon B \to A$. Możemy również konstruować bardziej złożone własności, będące funkcją zdaniową wielu obiektów i wielu morfizmów. Jeżeli własność $P_{\mathbf{C}}(A, B, \ldots, f, g, \ldots)$ zachodzi dla wszystkich obiektów i morfizmów kategorii $\mathbf{C}$, mówimy, że kategoria **C** spełnia własność P, co zapisujemy jako $P(\mathbf{C})$. Możemy wreszcie przedstawić *zasadę dualności*:

> Jeżeli własność P zachodzi we wszystkich kategoriach, wówczas własność P^{op} zachodzi we wszystkich kategoriach.

Zasada ta wynika z dwóch obserwacji: $(\mathbf{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathbf{C}$ oraz równoważności:

$$P^{\mathrm{op}}(\mathbf{C}) \text{ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy } P(\mathbf{C}^{\mathrm{op}}).$$

Konsekwencje tej zasady są doniosłe. Ponieważ każde stwierdzenie w języku teorii kategorii ma dwa równoważne stwierdzenia, dowód ogólnej własności obiektów/morfizmów pociąga za sobą dowód własności dualnej.

Ćwiczenie 2.1.1 Wykaż, że:

a) $f: A \to B$ jest monomorfizmem w kategorii **C** wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{\mathrm{op}}: B \to A$ jest epimorfizmem w kategorii $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$,

b) dla dowolnych obiektów $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ obiekt Z jest produktem X i Y (wraz z morfizmami π_1, π_2) wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest koproduktem tych obiektów.

Przykład 2.1.3 Przytoczmy stwierdzenie 1.2.2:

> Jeżeli $g \circ f$ jest monomorfizmem, to f jest monomorfizmem.

Dualne stwierdzenie brzmi zatem:

> Jeżeli $f \circ g$ jest epimorfizmem, to f jest epimorfizmem.

Dowód pierwszej własności na mocy zasady dualności implikuje również drugi rezultat.

Pojęcia dualne w sensie teorii kategorii w języku angielskim często mają przedrostek „*co-*”, np. *product*/*coproduct*, *reflective subcategory*/*coreflective subcategory* etc. Tym samym *comonomorphism* oznaczałby *epimorphism*[3].

Na ogół kategorie **C** znacznie różnią się od swoich kategorii dualnych. Jeżeli jednak zachodzi równość $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, kategorię nazywamy samosprzeżoną.

Stwierdzenie 2.1.1
Każda kategoria dyskretna jest samosprzężona.

Dla dowodu powyższego stwierdzenia wystarczy zauważyć, że jedynymi morfizmami w takich kategoriach, z definicji kategorii dyskretnych, są identyczności.

Ćwiczenie 2.1.2 Podaj przykład nietrywialnej (nieskończonej, niedyskretnej) kategorii samosprzężonej.

[3] Czy *nut* oznacza to samo co *coconut*?

2.2 Funktory

W tej sekcji sformalizowane zostanie pojęcie transformacji między kategoriami. „Morfizmy” między kategoriami zachowującymi ich strukturę nazywać będziemy *funktorami*:

Definicja 2.2.1 (Funktor)
Niech dane będą dwie kategorie $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$. *Funktorem* (kowariantnym) $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ nazywamy funkcję[4], która każdemu obiektowi $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ przyporządkowuje obiekt $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ oraz każdemu morfizmowi $f\colon A \to B$ kategorii $\mathbf{C}$ morfizm $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ tak, że:

1. F zachowuje złożenia, tj. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ dla odpowiednich $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C})$,
2. F zachowuje identyczności: $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ dla każdego $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Zwróćmy uwagę, że w definicji funktora również morfizmy muszą zostać przyporządkowane odpowiednim morfizmom – funktory przenoszą nie tylko obiekty między kategoriami, ale także przekształcenia. Definicja, podobnie jak określenie kategorii, jest bardzo szeroka. Zapoznajmy się więc z elementarnymi przykładami funktorów.

Przykład 2.2.1 Dla dowolnej kategorii $\mathbf{C}$ możemy określić:

- *identyczność kategorii* $\mathrm{id}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ spełniająca

  $$\mathrm{id}(A) = A, \quad \mathrm{id}(\mathbf{f}) = f, \quad A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}),\ f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C})$$

  jest funktorem,

- *funktor stały* $C\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ spełniający

  $$C(A) = D_0, \quad C(f) = \mathrm{id}_{D_0}, \quad A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}),\ f \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}),$$

  gdzie $\mathbf{D}$ jest dowolną niepustą kategorią,

Dla małych kategorii utworzonych z częściowych porządków/monoidów można scharakteryzować postać funktorów między tymi kategoriami:

Przykład 2.2.2

- Jeżeli $(P, \leqslant)$ oraz $(Q, \leqslant)$ są częściowymi porządkami tworzącymi małe kategorie (przykład 1.1.3), funktorami $F\colon P \to Q$ są dokładnie odwzorowania zachowujące porządek[5].
- Jeżeli M oraz N są monoidami (patrz przykład 2.1.2), funktorami między kategoriami $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$ są dokładnie homomorfizmy monoidów.

[4]W przypadku, gdy ogół obiektów tworzy klasę, możemy rozszerzyć pojęcie funkcji o dziedzinie/przeciwdziedzinie będącej klasą.

[5]Odwzorowanie $F\colon P \to Q$ jest *zachowujące porządek*, jeżeli $a \leqslant b$ pociąga $F(a) \leqslant F(b)$ dla wszystkich $a, b \in P$.

Ćwiczenie 2.2.1 Sprawdź powyższe stwierdzenia.

Przykład 2.2.3 W kategorii **Set** można zdefiniować następujące funktory:

- *zbioru potęgowego* $\mathcal{P}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, gdzie każdemu zbiorowi A przyporządkowany jest zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$, natomiast każdej funkcji $f\colon A \to B$ odwzorowanie $\mathcal{P}(f)\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, które każdemu podzbiorowi $S \subseteq A$ przyporządkowuje obraz $f(S) \subseteq B$.

- *n-tej potęgi* $S^n\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, określony jako:

$$S^n(f\colon A \to B) = f^n\colon A^n \to B^n,$$

gdzie $f^n(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

Część rozważanych do tej pory obiektów matematycznych określanych jest na zbiorach – są to zbiory wraz z dodatkową strukturą (np. strukturą grupy/pierścienia/przestrzeni liniowej/przestrzeni topologicznej etc). W kategoriach tego rodzaju morfizmami są odpowiednie funkcje. Dla każdej z wymienionych kategorii możemy wyróżnić tzw. *funktor zapominania* $U\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$, który „zapomina” o przylegającej strukturze. Funktor każdemu obiektowi zwraca odpowiadający zbiór, natomiast morfizmowi – odpowiadającą funkcję. Dla przykładu funktor $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ każdej grupie G przyporządkowuje zbiór G, natomiast homomorfizmowi grup $\varphi\colon G \to H$ – funkcję φ. Kategorie o powyższym charakterze nazywamy *konkretnymi*.

Stwierdzenie 2.2.1
Niech $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ będzie funktorem. F zachowuje izomorfizmy, tj. jeżeli $i\colon A \to A'$ jest izomorfizmem w $\mathbf{C}$, $F(i)$ jest izomorfizmem między $F(A)$ oraz $F(B)$.

Dowód. Wystarczy skorzystać z faktu, że funktory zachowują złożenia oraz identyczności:

$$F(i) \circ F(i^{-1}) = F(i \circ i^{-1}) = F(\mathrm{id}_{A'}) = \mathrm{id}_{F(A')},$$

podobnie $F(i^{-1}) \circ F(i) = \mathrm{id}_{F(A)}$. ■

Stwierdzenie przeciwne nie zachodzi w ogólności:

Ćwiczenie 2.2.2 Podaj przykład funktora, dla którego $F(i)$ jest izomorfizmem, natomiast i nie.

Stwierdzenie 2.2.2
Złożenie $G \circ F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ funktorów $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ oraz $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ określone jako

$$(G \circ F)(f\colon A \to B) = G(F(f))\colon G(F(A)) \to G(F(B))$$

jest funktorem.

Definicja 2.2.2 (Izomorfizm kategorii)
Funktor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ nazywamy *izomorfizmem kategorii*, jeżeli istnieje funktor $G\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ spełniający

$$G \circ F = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}, \quad F \circ G = \mathrm{id}_{\mathbf{D}}.$$

Jak można się spodziewać, funktor G występujący w powyższej definicji jest określony jednoznacznie, stąd możemy przyjąć oznaczenie $G = F^{-1}$. Kategorie $\mathbf{C}$ oraz $\mathbf{D}$, dla których istnieje izomorfizm, nazywamy izomorficznymi i stosujemy zapis $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$.